

KELENGKAPAN VEKTOR BERDIMENSI HINGGA DI DALAM RUANG BERNORMA KUASI

Helmi Firdaus

Universitas Nurul Huda, OKU Timur, Indonesia; helmifirdaus@unuha.ac.id

ARTICLE INFO

Article history:

Received 2026-06-18

Revised 2026-06-28

Accepted 2026-08-09

ABSTRAK

Tulisan ini membahas sifat kelengkapan vektor berdimensi hingga pada ruang bernorma kuasi yang bertujuan memberikan garansi terhadap suatu vektor didalam suatu ruang bernorma kuasi dengan dimensi hingga yang bersifat Cauchy mempunyai limit. Metode penelitian yang digunakan adalah tinjauan literatur dengan memberikan pembuktian dan contoh secara langsung. Penelitian ini dimulai dengan membahas konsep fundamental seperti konvergen, Cauchy, serta terbatas. Selain itu, sifat pendukung seperti ketunggalan limit serta konstanta dari norma kuasi diteliti dan diberikan penjelasannya. Setelah membahas sifat fundamental tersebut, penelitian berlanjut pada konstuksi suatu teorema dan pembuktiannya yang menjelaskan ketaksamaan pada suatu vektor bebas liner dengan dimensi hingga yang memiliki batas bawah nilai norma kuasi. Hal ini diperlukan agar analisis konvergensi pada norma kuasi yang memiliki konstanta $K \geq 1$ bisa dikontrol dan meskipun tidak berlakunya ketaksamaan segitiga umum yang terjadi pada norma biasa. Pada bagian terakhir, diberikan pembuktian sifat kelengkapan dari ruang bernorma kuasi berdimensi hingga merupakan lengkap terhadap norma kuasinya. Penelitian ini penting untuk menjamin generalisasi ruang berdimensi hingga didalam ruang bernorma kuasi tetap tertutup dan lengkap, sama seperti pada ruang bernorma serta mendukung pengembangan lebih lanjut teori operator linear terbatas, dan teori titik tetap pada ruang bernorma kuasi.

Kata Kunci: Ruang Bernorma Kuasi; Ruang Berdimensi Hingga; Kelengkapan; Barisan Cauchy; Konvergensi.

ABSTRACT

This paper investigates the completeness property of vectors in finite dimensional quasi-normed spaces. More precisely, the objective is to ensure that, given a finite dimensional quasi normed space every Cauchy sequence admits a limit in its quasi normed space. The methodology is based on library research, supported by direct proofs and concrete examples. The development begins with the fundamental concepts relevant to quasi-normed analysis, namely convergence, Cauchy sequence, and boundedness. After these preliminary results are obtained, the study advances to the formulation and proof of a theorem that yields an inequality for a finite linearly independent set of vectors. This inequality provides a lower bound for the quasi norm of a finite linear combination. Such a bound is crucial to regulate the quasi norm convergence analysis in the regime $K \geq 1$, particularly because general triangle

inequality used in norm settings is not available. Finally, the article presents the proof that the finite-dimensional quasi normed space is complete with respect to its quasi norm. This result is significant in guaranteeing that finite dimensional generalization with quasi norm remains closed and complete, in analogy with the corresponding theory in normed spaces. Moreover, it provides a basis for further developments in the theory of bounded linear operators and fixed-point principles in quasi normed. .

Keyword: Quasi Norm Space, Finite Dimensional Space, Completeness, Cauchy Sequences, Convergence.

This is an open access article under the [CC BY](#) license.



Corresponding Author:

Helmi Firdaus

Universitas Nurul Huda; helmifirdaus@unuha.ac.id

1. PENDAHULUAN

Penelitian tentang analisis fungsional masih menjadi topik yang menarik untuk diteliti khususnya pada bidang generalisasi atau perumuman sifat dari sembarang ruang vektor. Penelitian yang menjadi dasar utama penelitian ini terhadap analisis fungsional adalah ruang bernorma yang pernah diteliti sifat dan karakteristiknya oleh Cobzas (2010), Chmielinski (2014), Bakr (2017), dan Taha, et al. (2023). Pada kasus ruang bernorma dimana ruang vektor yang diberikan suatu norma, perumuman dilakukan dengan menggunakan norma kuasi yang dibahas oleh Kwun, et. al (2016), Robdera (2016), Li dan Wu (2022), Baak (2005), Firdaus (2024) yang dilakukan secara terpisah yang menjelaskan bahwa terdapat generalisasi pada ketaksamaan segitiganya yaitu terdapat suatu konstanta $K \geq 1$ sehingga untuk setiap $x, y \in X$ berlaku $|x + y|_q \leq K(|x|_q + |y|_q)$ dengan X merupakan ruang bernorma kuasi. Pembahasan ini linear dengan yang dilakukan oleh peneliti terdahulu secara terpisah oleh Aoki (1942) dan Nazeer, et al. (2018), yang membahas ruang barisan ℓ^p untuk nilai $0 < p < 1$, Romaguera dan Sanchis (2000) tentang norma kuasi untuk Lipschitz, serta Kang (2010) dan Rano dan Bag (2015) terkait fungsional pada ruang bernorma kuasi. Fenomena yang dibahas pada penelitian tersebut secara eksplisit menggunakan ruang bernorma kuasi sebagai alat untuk membuktikan kajian aplikasi pada konsep lain. Hal ini membuat celah akademik untuk diteliti terkait kelengkapan pada ruang bernorma kuasi itu sendiri. Sifat ini dipandang perlu sebagai landasan berpikir dasar untuk menerapkan norma kuasi ke dalam ruang vektor lain agar secara keilmuan dasar tidak hanya sekadar memakai saja namun bisa memahami proses kelengkapan dari ruang bernorma kuasi itu sendiri. Intuisi ini juga didasarkan pada penelitian Bae dan Park (2010), Ebadian (2012), Dung dan Hang (2018), Yan (2021), serta Al Delfi (2024). Kelengkapan suatu ruang vektor sangat penting agar jaminan limit dari suatu sembarang barisan Cauchy tetap berada pada ruang tersebut dan nantinya bisa dikonstruksi sebagai ruang Banach. Tanpa kelengkapan, limit dari suatu

aproksimasi pada suatu persamaan fungsi sering gagal karena limit tersebut keluar dari ruangnya. Penelitian seperti yang dilakukan Berinde (2024) dan Huu Tron & Thera (2024) yang berbicara tentang titik tetap pada ruang kuasi Banach secara terpisah menggunakan sifat kelengkapan sebagai dasar utama landasan penelitian. Ide dari sifat kelengkapan juga digunakan Firdaus dan Supama (2020) dalam meneliti teori operator pada ruang bernorma kuasi dan Fiorenza, et al (2021) yang menjadikan sifat kelengkapan untuk diperluas dalam kelas baru ruang kuasi Banach. Berdasarkan hal tersebut konsep fundamental untuk menuju kelengkapan seperti barisan konvergen, barisan Cauchy, sifat terbatas bisa diteliti sebagai landasan penulisan ini. Penelitian ini merujuk pada Hyers (1939), Kreyszig (1979), Rano dan Bag (2014), sebagai motivasi utama dengan versi pembuktian yang lebih detail dan alur yang berbeda tentang kelengkapan pada ruang bernorma kuasi berdimensi hingga. Lebih lanjut, diberikan pembuktian suatu teorema yang yang dimotivasi pada Firdaus (2024) tentang ketaksamaan vektor bebas linear yang menjadi alat untuk membuktikan topik utama penelitian ini. Pada bagian akhir, diberikan pembuktian secara eksplisit kelengkapan dari suatu ruang bernorma kuasi untuk setiap sebarang vektor berdimensi hingga dengan norma kuasinya.

2. METODE

Metode yang digunakan dalam penelitian ini menggunakan tinjauan literatur terhadap penelitian-penelitian sebelumnya yang diterbitkan dalam jurnal ilmiah, sekaligus memberikan pembuktian terhadap teorema terkait dan contoh konkret. Metode tersebut dijelaskan secara sistematis sebagai berikut.

- a. Mencari sumber referensi dari jurnal yang berkaitan dengan topik penelitian, khususnya pada ruang bernorma kuasi.
- b. Mencari gap dari Hyers (1939), Kreyszig (1979) dan Rano dan Bag (2014) untuk dijadikan motivasi dan ide penelitian khususnya dalam membahas sifat barisan dalam ruang bernorma kuasi.
- c. Menjelaskan konsep dasar pada ruang bernorma kuasi seperti kekonvergenan, barisan Cauchy, serta terbatas.
- d. Menjelaskan teorema ketaksamaan vektor bebas liner pada ruang bernorma kuasi dengan dari motivasi penelitian Firdaus (2024) pendekatan pembuktian yang berbeda.
- e. Memberikan teorema dan pembuktian dari sifat kelengkapan ruang bernorma kuasi berhingga dengan menggunakan teorema pada langkah ke 4 dan menjamin sifat lengkap berlaku untuk sebarang ruang berdimensi hingga dengan norma kuasi.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pembahasan penelitian meliputi ruang bernorma kuasi berikut dengan sifat-sifat yang terdefinisinya dan membahas tentang kelengkapannya.

3.1 Ruang Bernorma Kuasi

Pada bagian ini diberikan definisi dari ruang bernorma kuasi beserta beberapa contoh dari ruang bernorma kuasi yang merujuk pada Hyers (1939) serta beberapa contoh modifikasi dari

ide Firdaus (2024). Lebih lanjut diberikan contoh ruang bernorma kuasi yang bukan ruang bernorma.

Definisi 1. Diberikan X ruang vektor atas lapangan $\mathbb{R}$ dan θ adalah vektor nol di dalam X . Fungsi bernilai real $|\cdot|_q$ pada X yang memenuhi

- (i) $|x|_q \geq 0$ untuk setiap $x \in X$,
- (ii) $|x|_q = 0$ jika dan hanya jika $x = \theta$,
- (iii) $|\lambda x|_q = |\lambda| |x|_q$ untuk setiap $x \in X$ dan $\lambda \in \mathbb{R}$,
- (iv) terdapat suatu konstanta $K \geq 1$ sedemikian sehingga untuk setiap $x, y \in X$ berlaku

$$|x + y|_q \leq K(|x|_q + |y|_q)$$

disebut norma kuasi pada X . Pasangan $(X, |\cdot|_q)$ disebut ruang bernorma kuasi.

Berikut di bawah ini diberikan contoh ruang bernorma kuasi.

Contoh 1. Pasangan $(\mathbb{R}^n, |\cdot|_{q^2})$ dengan $|x|_{q^2} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{1}{2}}\right)^2$ untuk setiap $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ merupakan ruang bernorma kuasi.

Bukti. Cukup jelas bahwa syarat dari (i) – (iii) berlaku. Selanjutnya dibuktikan untuk syarat (iv). Diambil sebarang $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ dan $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ berlaku

$$\begin{aligned} |\vec{x} + \vec{y}|_{q^2} &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{\frac{1}{2}}\right)^2 \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n (|x_i|^{\frac{1}{2}} + |y_i|^{\frac{1}{2}})\right)^2 \\ &\leq 2 \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^{\frac{1}{2}}\right)^2 \\ &= 2(|\vec{x}|_{q^2} + |\vec{y}|_{q^2}). \end{aligned}$$

Terdapat $K = 2$ sehingga memenuhi $|\vec{x} + \vec{y}|_{q^2} \leq K(|\vec{x}|_{q^2} + |\vec{y}|_{q^2})$ untuk setiap $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Dengan kata lain, pasangan $(\mathbb{R}^n, |\cdot|_{q^2})$ dengan $|x|_{q^2} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{1}{2}}\right)^2$ untuk setiap $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ merupakan ruang bernorma kuasi. ■

Berdasarkan definisi di atas, didapatkan bahwa ruang bernorma merupakan ruang bernorma kuasi. Adapun untuk arah sebaliknya belum tentu berlaku. Berikut contoh yang menjelaskan bahwa ruang bernorma kuasi belum tentu ruang bernorma.

Contoh 2. Pada Contoh 1 merupakan ruang bernorma kuasi yang bukan ruang bernorma.

Bukti. Diandaikan $(\mathbb{R}^n, |\cdot|_{q^2})$ merupakan ruang bernorma, maka terdapat suatu $K = 1$ sehingga $|\vec{x} + \vec{y}|_{q^2} \leq K(|\vec{x}|_{q^2} + |\vec{y}|_{q^2})$ untuk setiap $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$. Dipilih $\vec{x} = (1, 0, \dots, 0)$ dan $\vec{y} = (0, 1, \dots, 0)$. Diperoleh bahwa $|\vec{x} + \vec{y}|_{q^2} = 4$ dan $|\vec{x}|_{q^2} + |\vec{y}|_{q^2} = 2$. Dengan kata lain, $|\vec{x} + \vec{y}|_{q^2} > |\vec{x}|_{q^2} + |\vec{y}|_{q^2}$. Kontradiksi. ■

Secara umum, fungsi norma kuasi merupakan fungsi yang tidak kontinu. Norma kuasi merupakan fungsi kontinu jika norma kuasi merupakan norma pada ruang vektornya. Berikut contoh norma kuasi yang tidak kontinu.

Contoh 3. Diberikan $\mathbb{R}^2$ ruang vektor serta $|\cdot|_q$ fungsi pada $\mathbb{R}^2$ dengan

$$|\vec{x}|_q = \begin{cases} \frac{1}{2}|x_1|, & \text{untuk } x_2 = 0 \\ |x_1| + |x_2|, & \text{untuk } x \neq 0 \end{cases}$$

untuk setiap $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$. Fungsi $|\cdot|_q$ merupakan norma kuasi pada $\mathbb{R}^2$ tetapi tidak kontinu pada $\mathbb{R}^2$.

Bukti. Cukup jelas bahwa fungsi $|\cdot|_q$ merupakan norma kuasi dengan $K = 2$. Selanjutnya ditunjukkan bahwa $|\cdot|_q$ bukan fungsi kontinu pada $\mathbb{R}^2$. Diambil suatu barisan (x_n) di dalam $\mathbb{R}^2$ dengan $\vec{x}_n = \left(1, \frac{1}{n}\right)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, dan $\vec{x} = (1, 0)$. Jelas bahwa $(\vec{x}_n)$ konvergen ke $\vec{x}$ karena untuk setiap $\delta > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan sifat $n \geq N$ berlaku

$$|\vec{x}_n - \vec{x}|_q = \left| \left(1, \frac{1}{n}\right) - (1, 0) \right|_q = \left| 0, \frac{1}{n} \right|_q = \left| \frac{1}{n} \right| < \frac{1}{N} < \delta.$$

Namun, barisan $(|\vec{x}_n|_q)$ tidak konvergen ke $|\vec{x}|_q$ karena

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\vec{x}_n|_q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1,$$

sedangkan $|\vec{x}|_q = \frac{1}{2}$. Dengan kata lain, fungsi $|\cdot|_q$ tidak kontinu pada $\mathbb{R}^2$. ■

Konstanta K pada Definisi 1.1 mempunyai sifat yang berlaku secara umum untuk setiap ruang bernorma kuasi. Teorema berikut di bawah ini menjelaskan tentang sifat tersebut.

Teorema 1. Jika $(X, |\cdot|_q)$ merupakan ruang bernorma kuasi dengan nilai konstanta K , maka

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \right|_q \leq K^{n-1} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|_q \right)$$

untuk setiap $x_i \in X$ dan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Bukti. Pembuktian cukup jelas dengan menggunakan metode induksi matematika. ■

3.2 Konvergen, Cauchy, dan Terbatas Ruang Bernorma Kuasi

Pada bagian ini dibahas mengenai sifat pada ruang bernorma kuasi yang terkait dengan konvergen, Cauchy, dan terbatas yang merujuk pada Rano dan Bag (2015). Untuk bagian awal, dibahas konsep barisan konvergen dan barisan Cauchy pada ruang bernorma kuasi berturut-turut dalam definisi di bawah ini.

Definisi 2. Diberikan $(X, |\cdot|_q)$ ruang bernorma kuasi serta barisan (x_n) di dalam X .

- (i) Barisan (x_n) dikatakan konvergen ke $x \in X$ jika $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x|_q = 0$, yaitu untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq n_0$ berlaku $|x_n - x|_q < \epsilon$.
- (ii) Barisan (x_n) disebut barisan Cauchy jika $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x_m|_q = 0$, yaitu untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $m, n \in \mathbb{N}$ dengan $m, n \geq n_0$ berlaku $|x_n - x_m|_q < \epsilon$.

Berikut diberikan contoh barisan konvergen dan barisan Cauchy yang dijelaskan di bawah ini.

Contoh 4. Diberikan ruang bernorma kuasi $(\mathbb{R}^2, |\cdot|_{q^2})$ dengan definisi fungsi dari $|\cdot|_{q^2}$ sebagaimana yang diberikan pada contoh 1.2. Barisan (x_n) di dalam $\mathbb{R}^2$ dengan definisi $\vec{x}_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ merupakan barisan yang konvergen ke $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ sekaligus barisan Cauchy.

Bukti. Diambil sebarang $\epsilon > 0$. Bagian pertama akan dibuktikan barisan konvergen ke $(0,0) \in \mathbb{R}^2$. Diperhatikan bahwa $\frac{2}{\epsilon} \in \mathbb{R}$, sehingga menggunakan sifat Archimedean terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga $\frac{2}{n_0} < \epsilon$. Akibatnya untuk setiap $n \geq n_0$ dengan $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$|\vec{x} - (0,0)|_{q^2} = \left(\sqrt{\left|\frac{1}{n}\right|} + \sqrt{\left|\frac{2}{n}\right|} \right)^2 < \left(2 \sqrt{\left|\frac{2}{n}\right|} \right)^2 = 4 \cdot \frac{2}{n} \leq 4 \cdot \frac{2}{n_0} < 4\epsilon$$

Terbukti $(\vec{x}_n)$ konvergen ke $(0,0)$. Untuk bagian kedua dibuktikan bahwa barisan tersebut merupakan barisan Cauchy. Analog dengan bagian pertama bahwa menggunakan sifat Archimedean, untuk $m, n \geq n_0$ dengan $m, n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$|\vec{x}_n - \vec{x}_m|_{q^2} = \left(\sqrt{\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|} + \sqrt{\left|\frac{2}{n} - \frac{2}{m}\right|} \right)^2 \leq \left(\sqrt{\left|\frac{2}{n_0}\right|} + \sqrt{\left|\frac{4}{n_0}\right|} \right)^2 = (2 + \sqrt{2})^2 \cdot \frac{1}{n_1}$$

Karena $\frac{2}{n_0} < \epsilon$ maka diperoleh bahwa $|\vec{x}_n - \vec{x}_m|_{q^2} < (2 + \sqrt{2})^2 \epsilon$

Terbukti $(\vec{x}_n)$ barisan Cauchy. ■

Berdasarkan Definisi 2 di atas, terdapat hubungan antara sifat konvergen dan Cauchy yang dijelaskan dalam teorema berikut.

Teorema 2. Diberikan $(X, |\cdot|_q)$ ruang bernorma kuasi dan $(\vec{x}_n)$ di dalam X . Jika $(\vec{x}_n)$ konvergen, maka $(\vec{x}_n)$ Cauchy.

Bukti. Diberikan barisan $(\vec{x}_n)$ konvergen ke y , dengan $y \in X$. Artinya untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat n_0 sehingga untuk setiap $n \geq n_0$ dengan $n \in \mathbb{N}$ berlaku bahwa $|\vec{x}_n - y|_q < \epsilon$. Dengan demikian untuk setiap $m, n \in \mathbb{N}$ dengan sifat $m, n \geq n_0$ berlaku

$$|\vec{x}_n - \vec{x}_m|_q = |x_m - y + y - x_n| \leq K(|x_m - y| + |y - x_n|) < 2K\epsilon$$

untuk suatu $K \geq 1$. Dengan demikian $(\vec{x}_n)$ barisan Cauchy. ■

Selanjutnya diberikan teorema berikut ini yang menjelaskan sifat ketunggalan limit dan nilai limit dari sub barisan di dalam ruang bernorma kuasi.

Teorema 3. Diberikan $(X, |\cdot|_q)$ ruang bernorma kuasi dan barisan $(\vec{x}_n)$ di dalam X .

- (i) Jika nilai limit dari $(\vec{x}_n)$ ada, maka nilai limit barisan $(\vec{x}_n)$ tersebut tunggal.
- (ii) Setiap barisan $(\vec{x}_{n_j})$ dari $(\vec{x}_n)$, dengan $(\vec{x}_n)$ barisan yang konvergen, merupakan barisan konvergen dengan nilai limitnya sama dengan nilai limit barisan $(\vec{x}_n)$.

Bukti. Untuk bagian (i) cukup jelas dengan menggunakan konsep konvergenya. Untuk bagian (ii) dengan menggunakan sifat konvergen dari $(\vec{x}_n)$ serta sifat indeks dari barisan yang merupakan monoton naik maka sub barisan $(\vec{x}_{n_j})$ konvergen ke nilai yang sama dengan barisan $(\vec{x}_n)$. ■

Pada bagian ini, dibahas sifat terbatas pada ruang bernorma dibahas pada definisi berikut yang berasal dari Rano dan Bag (2015) beserta contoh yang dimodifikasi.

Definisi 3. Diberikan $(X, |\cdot|_q)$ ruang bernorma kuasi dan $B \subseteq X$. Himpunan B dikatakan terbatas jika terdapat $M > 0$ sehingga untuk setiap $x \in B$ berlaku $|x|_q \leq M$.

Contoh 5. Diberikan $(\mathbb{R}^2, |\cdot|_{q^2})$ ruang bernorma kuasi sebagaimana yang diberikan pada contoh Contoh 1.7. Himpunan bagian $W \subset \mathbb{R}^2$ dengan definisi

$$W := \{\vec{w} = (w_1, w_2) : 2 \leq w_1 \leq 3, -2 \leq w_2 \leq 1\}$$

merupakan himpunan terbatas.

Bukti. Cukup jelas jika kita mengambil $M = (\sqrt{|3|} + \sqrt{|-2|})^2$ sehingga untuk setiap $w \in W$ berlaku $|\vec{w}|_{q^2} \leq M$. ■

Berikutnya diberikan suatu teorema yang membahas hubungan sifat Cauchy dan terbatas pada ruang bernorma kuasi.

Teorema 4. Diberikan $(X, |\cdot|_q)$ ruang bernorma kuasi dan (x_n) barisan di dalam X . Jika (x_n) barisan Cauchy, maka (x_n) terbatas.

Bukti. Dipilih $\epsilon = \frac{1}{3}$ sehingga ada $n_0 \in \mathbb{N}$ yang selanjutnya untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq n_0$ berlaku $|x_n - x_{n_0}|_q < \frac{1}{3}$. Kemudian diperhatikan bahwa $|x_n|_q \leq K(|x_n - x_{n_0}|_q + |x_{n_0}|_q)$, sehingga $|x_n|_q < K(\frac{1}{2} + |x_{n_0}|_q)$ untuk $K \geq 1$ dan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan sifat $n \geq n_0$. Selanjutnya dipilih suatu bilangan positif $Q = \max\{|x_1|_q, |x_2|_q, \dots, |x_{n_0-1}|_q, K(\frac{1}{2} + |x_{n_0}|_q)\}$, sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku $|x_n|_q \leq Q$. Terbukti barisan Cauchy (x_n) terbatas. ■

Berikut ini diberikan definisi sebagai landasan awal menuju pembuktian kelengkapan ruang bernorma kuasi yang didasari pada penelitian Rano dan Bag (2015).

Definisi 4. Diberikan $(X, |\cdot|_q)$ ruang bernorma kuasi. Ruang bernorma kuasi $(X, |\cdot|_q)$ dikatakan lengkap, jika untuk setiap barisan Cauchy di dalam X konvergen di dalam X .

Berikut contoh serta dari pembuktiannya dari ruang bernorma kuasi lengkap.

Contoh 6. Ruang barisan $\ell^{\frac{1}{2}} = \{\vec{x} = (x_n) : x_k \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} < \infty\}$ terhadap norma kuasi $|\vec{x}|_{q^{\frac{1}{2}}} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}}\right)^2$ untuk setiap $\vec{x} \in \ell^{\frac{1}{2}}$ merupakan ruang bernorma kuasi lengkap.

Bukti. Jelas bahwa ruang barisan $\ell^{\frac{1}{2}}$ merupakan ruang bernorma kuasi dengan konstanta $K = 2$. Selanjutnya dibuktikan untuk sifat kelengkapannya. Diambil sebarang barisan Cauchy $(\overline{x_n})$ di dalam $\ell^{\frac{1}{2}}$. Dengan demikian, untuk $\epsilon > 0$, terdapat bilangan asli N sehingga untuk setiap $m, n \in \mathbb{N}$, berlaku bahwa

$$|\overline{x_n} - \overline{x_m}|_{q, \frac{1}{\ell^2}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_n^j - x_m^j|^{\frac{1}{2}} \right)^2 < \epsilon$$

Dengan demikian diperoleh bahwa $|x_n^j - x_m^j| < \epsilon$ untuk setiap $j \in \mathbb{N}$ dan untuk setiap $m, n \geq N$. Dengan kata lain untuk setiap $j \in \mathbb{N}$, barisan (x_n^j) merupakan barisan Cauchy di dalam $\mathbb{R}$. Karena $\mathbb{R}$ lengkap, maka barisan (x_n^j) konvergen di dalam $\mathbb{R}$ atau untuk setiap $j \in \mathbb{N}$, terdapat $y^j \in \mathbb{R}$ sehingga $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^j = y^j$. Selanjutnya dibentuk barisan bilangan real $\vec{y} = (y^j)$. Kemudian dibuktikan bahwa $\vec{y} = (y^j) \in \ell^{\frac{1}{2}}$. Diperhatikan bahwa dari $(\overline{x_n})$ Cauchy, maka barisan $(\overline{x_n})$ merupakan barisan terbatas berdasarkan teorema 2.7. Dengan kata lain terdapat $M > 0$ sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku $|\overline{x_n}|_{q, \frac{1}{\ell^2}} \leq M$ atau $\sum_{j=1}^{\infty} |x_n^j|^{\frac{1}{2}} < M^{\frac{1}{2}}$. Jika diambil n menuju tak hingga diperoleh $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} |x_n^j|^{\frac{1}{2}} < \lim_{n \rightarrow \infty} M^{\frac{1}{2}}$. Akibatnya diperoleh $\sum_{j=1}^{\infty} |y^j|^{\frac{1}{2}} < M^{\frac{1}{2}} < \infty$ atau $(y^j) \in \ell^{\frac{1}{2}}$. Dengan demikian $\vec{y} \in \ell^{\frac{1}{2}}$. Berikutnya ditunjukkan jika $(\overline{x_n})$ konvergen ke $\vec{y}$ di dalam $\ell^{\frac{1}{2}}$. Diperhatikan dari pertidaksamaan untuk setiap $m, n \in \mathbb{N}$

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_n^j - x_m^j|^{\frac{1}{2}} \right)^2 < \epsilon.$$

Dengan demikian untuk $m \rightarrow \infty$ diperoleh

$$\epsilon > \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_n^j - \lim_{m \rightarrow \infty} x_m^j|^{\frac{1}{2}} \right)^2 = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_n^j - y^j|^{\frac{1}{2}} \right)^2 = |\overline{x_n} - \vec{y}|_{q, \frac{1}{\ell^2}}.$$

Dengan kata lain, $(\overline{x_n})$ konvergen ke $\vec{y}$ di dalam $\ell^{\frac{1}{2}}$. Dengan demikian, terbukti bahwa $(\ell^{\frac{1}{2}}, |\cdot|_{q, \frac{1}{\ell^2}})$ lengkap. ■

3.3 Kelengkapan Ruang Bernorma Kuasi Berdimensi Hingga.

Pada bagian ini diberikan terlebih dahulu teorema dasar yang menjadi alat utama dalam pembuktian sifat kelengkapan ruang bernorma kuasi berdimensi hingga. Teorema ini dimotivasi oleh penelitian Firdaus (2024) dan selanjutnya diberikan pembuktian secara detail yang dijelaskan pada teorema berikut.

Teorema 5. Diberikan ruang bernorma kuasi $(X, |\cdot|_q)$. Jika $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ himpunan vektor yang saling bebas linear di dalam X , maka terdapat $R > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap skalar $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ berlaku

$$|\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n|_q \geq R(|\lambda_1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_n|)$$

Bukti. Didefinisikan bahwa $s = |\lambda_1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_n|$ dan $\mathcal{H} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ himpunan bebas linear di dalam X . Terdapat 2 kemungkinan untuk s .

1. Jika $s = 0$, maka $s = |\lambda_1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_n| = 0$. Diperoleh $\lambda_i = 0$ untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Berdasarkan sifat norma kuasi pada X , diperoleh

$$\begin{aligned} |\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n|_q &\geq 0 \\ &= C \cdot 0 \\ &= C \cdot s \\ &= C \cdot (|\lambda_1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_n|) \end{aligned}$$

untuk setiap $C > 0$.

2. Jika $s > 0$, maka $s = |\lambda_1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_n| > 0$. Dari pertidaksamaan

$$|\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n|_q \geq R(|\lambda_1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_n|)$$

jika masing-masing ruas dibagi s , diperoleh

$$\left| \frac{\lambda_1}{s} x_1 + \frac{\lambda_2}{s} x_2 + \dots + \frac{\lambda_n}{s} x_n \right|_q \geq R \left(\frac{|\lambda_1|}{s} + \frac{|\lambda_2|}{s} + \dots + \frac{|\lambda_n|}{s} \right).$$

Diperhatikan dari $\frac{|\lambda_1|}{s} + \frac{|\lambda_2|}{s} + \dots + \frac{|\lambda_n|}{s} = 1$, sehingga berlaku

$$\left| \frac{\lambda_1}{s} x_1 + \frac{\lambda_2}{s} x_2 + \dots + \frac{\lambda_n}{s} x_n \right|_q \geq R.$$

Dimisalkan $\beta_i = \frac{\lambda_i}{s}$ untuk $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Diperoleh $\sum_{i=1}^n |\beta_i| = 1$ serta

$$\left| \frac{\lambda_1}{s} x_1 + \frac{\lambda_2}{s} x_2 + \dots + \frac{\lambda_n}{s} x_n \right|_q = |\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n|_q \geq R.$$

Dengan demikian, hanya dibuktikan bahwa terdapat $R > 0$ sehingga pertidaksamaan di atas berlaku untuk setiap $\beta_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ dengan $\sum_{i=1}^n |\beta_i| = 1$. Didandaikan tidak $R > 0$ yang memenuhi, maka untuk setiap $R > 0$, terdapat scalar-scalar $\beta_1^R, \beta_2^R, \dots, \beta_n^R$ dengan sifat $\sum_{i=1}^n |\beta_i^R| = 1$ sehingga $|\beta_1^R x_1 + \beta_2^R x_2 + \dots + \beta_n^R x_n|_q < R$. Akibatnya, untuk setiap $m \in \mathbb{N}$ terdapat skalar $\beta_1^m, \beta_2^m, \dots, \beta_n^m$ sehingga berlaku $|\beta_1^m x_1 + \beta_2^m x_2 + \dots + \beta_n^m x_n|_q < \frac{1}{m}$. Dengan kata lain, terdapat barisan (z_m) dengan $z_m = \sum_{i=1}^n \beta_i^m x_i$ untuk setiap $m \in \mathbb{N}$ dan berlaku $\lim_{m \rightarrow \infty} |z_m|_q = 0$ atau $\lim_{m \rightarrow \infty} z_m = \vec{0}$, dengan $\vec{0}$ elemen nol di dalam X . Diperhatikan untuk setiap $m \in \mathbb{N}$ berlaku $\sum_{i=1}^n |\beta_i^m| = 1$, sehingga $|\beta_i^m| \leq 1$. Dengan demikian untuk $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, diperoleh bahwa barisan (β_i^m) terbatas berdasarkan Definisi 2.5. Karena terbatas di $\mathbb{R}$, barisan (β_i^m) mempunyai sub barisan (β_i^{1m}) yang konvergen ke $\beta_i \in \mathbb{R}$ untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ atau $\lim_{m \rightarrow \infty} \beta_i^{1m} = \beta_i$. Akibatnya, dapat dibentuk sub barisan (z_m) yaitu (z_{1m}) untuk setiap $m \in \mathbb{N}$ yaitu

$$z_{1m} = \sum_{i=1}^n \beta_i^{1m} x_i.$$

Diperhatikan bahwa barisan (β_i^{1m}) merupakan barisan terbatas sekaligus konvergen di dalam $\mathbb{R}$ untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Dinotasikan sub barisan tersebut adalah (β_i^{2m}) yang konvergen untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ yang konvergen ke nilai yang sama dengan barisan (β_i^{1m}) yaitu β_i untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ berdasarkan Teorema 2.4 bagian (ii). Dengan argument yang sama maka dapat dibentuk sub barisan dari (z_{1m}) yaitu barisan (z_{2m}) dengan setiap $m \in \mathbb{N}$ yaitu

$$z_{2m} = \sum_{i=1}^n \beta_i^{2m} x_i.$$

Proses dilanjutkan sehingga setelah k langkah diperoleh barisan (z_{k_m}) yang merupakan sub barisan (z_m) dengan setiap $m \in \mathbb{N}$ berlaku

$$z_{k_m} = \sum_{i=1}^n \beta_i^{k_m} x_i$$

dengan $|\beta_i^{k_m}| \leq 1$ dan memenuhi $\lim_{m \rightarrow \infty} \beta_i^{k_m} = \beta_i$ dengan $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Dengan demikian untuk m menuju tak hingga diperoleh

$$\lim_{m \rightarrow \infty} z_{k_m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \beta_i^{k_m} x_i = \sum_{i=1}^n \lim_{m \rightarrow \infty} \beta_i^{k_m} x_i = \sum_{i=1}^n \beta_i x_i$$

untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Dinotasikan $\sum_{i=1}^n \beta_i x_i = z$. Diperhatikan bahwa $\sum_{i=1}^n |\beta_i| = 1$, sehingga β_i tidak semuanya bernilai nol. Karena $\mathcal{H} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ merupakan himpunan vektor bebas linear sehingga diperoleh bahwa nilai $z \neq \vec{0}$ atau $\lim_{m \rightarrow \infty} z_{k_m} \neq \vec{0}$. Namun diperhatikan bahwa barisan (z_{k_m}) merupakan sub barisan dari (z_m) yang mempunyai nilai limit bernilai $\vec{0}$ berdasarkan Teorema 2.4 bagian (ii). Terjadi kontradiksi sehingga pengandaian salah. Dengan demikian diperoleh bahwa terbukti terdapat $R > 0$ sehingga berlaku bahwa

$$\left| \frac{\lambda_1}{s} x_1 + \frac{\lambda_2}{s} x_2 + \dots + \frac{\lambda_n}{s} x_n \right|_q = |\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n|_q \geq R.$$

Dari kasus 1 dan 2 terbukti, maka Teorema 5 terbukti benar. ■

Selanjutnya, pada bagian ini diberikan aplikasi dari Teorema 5 di atas sekaligus menjadi alat untuk membuktikan teorema yang menjelaskan bahwa setiap ruang bernorma kuasi berdimensi hingga merupakan ruang yang lengkap.

Teorema 6. Setiap subruang berdimensi hingga X dari ruang bernorma kuasi Y adalah lengkap. Secara khusus, setiap ruang berdimensi hingga dari ruang bernorma kuasi adalah lengkap.

Bukti. Diambil sebarang barisan Cauchy (x_m) didalam X . Akan ditunjukkan bahwa barisan konvergen didalam X dengan limit barisan (x_m) dinyatakan sebagai x . Diberikan dimensi dari subruang X adalah berdimensi n serta $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ basis bagi X . Dengan demikian untuk setiap suku (x_m) memiliki kombinasi linear dari basis tersebut secara tunggal sehingga terdapat $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ konstanta pada $\mathbb{R}$ sehingga

$$x_m = \alpha_1^{(m)} e_1 + \alpha_2^{(m)} e_2 + \dots + \alpha_n^{(m)} e_n.$$

Karena barisan (x_m) Cauchy, maka untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga berlaku $|x_m - x_n|_q < \epsilon$ untuk setiap $m, n \in \mathbb{N}$ yang bersifat $m, n > N$. Diperhatikan bahwa

$$\epsilon > |x_m - x_n|_q = \left| \sum_{j=1}^n \alpha_j^{(m)} e_j - \sum_{j=1}^n \alpha_j^{(n)} e_j \right|_q = \left| \sum_{j=1}^n (\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(n)}) e_j \right|_q.$$

$m, n > N$. Berdasarkan Teorema 5, terdapat $Q > 0$ sehingga berlaku bahwa

$$\sum_{j=1}^n (\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(n)}) e_j \geq Q \sum_{j=1}^n |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(n)}|_q.$$

Dengan demikian diperoleh

$$\epsilon > |x_m - x_n|_q = \left| \sum_{j=1}^n \alpha_j^{(m)} e_j - \sum_{j=1}^n \alpha_j^{(n)} e_j \right|_q = \left| \sum_{j=1}^n (\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(n)}) e_j \right|_q \geq Q \sum_{j=1}^n |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(n)}|_q,$$

untuk setiap $m, n > N$. Dengan kata lain,

$$Q \left| \alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(n)} \right|_q \leq Q \sum_{j=1}^n \left| \alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(n)} \right|_q < \epsilon.$$

Jika dibagi untuk semua ruas dengan $Q > 0$, maka

$$\left| \alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(n)} \right|_q \leq \sum_{j=1}^n \left| \alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(n)} \right|_q < \frac{\epsilon}{Q}.$$

Diperoleh bahwa untuk setiap $m, n > N$, berlaku bahwa $\left| \alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(n)} \right|_q < \frac{\epsilon}{Q}$. Dengan kata lain barisan konstanta $(\alpha_j^{(m)}) = (\alpha_j^{(1)} \alpha_j^{(2)}, \dots)$ untuk $j = 1, 2, \dots, n$ merupakan barisan Cauchy didalam $\mathbb{R}$. Karena $\mathbb{R}$ lengkap, maka barisan $(\alpha_j^{(m)})$ konvergen didalam $\mathbb{R}$. Dinotasikan α_j merupakan limit dari barisan $(\alpha_j^{(m)})$. Akibatnya menggunakan limit tersebut diperoleh bahwa untuk n limit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ didefinisikan $x = \sum_{p=1}^n \alpha_p e_p$. Jelas bahwa $x \in X$ karena dapat dibentuk dari kombinasi linear terhadap basis pada X . Lebih lanjut menggunakan sifat norma kuasi pada X , terdapat $K > 0$ sehingga berlaku

$$\left| x_m - x \right|_q = \left| \sum_{j=1}^n (\alpha_j^{(m)} - \alpha_j) e_j \right|_q \leq K^{n-1} \sum_{j=1}^n \left| (\alpha_j^{(m)} - \alpha_j) \right|_q \left| e_j \right|_q.$$

Diperhatikan bahwa $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_j^{(m)} = \alpha_j$, sehingga $\lim_{m \rightarrow \infty} \left| x_m - x \right| = 0$. Akibatnya barisan (x_m) konvergen ke x . Terbukti bahwa X lengkap.

4. KESIMPULAN

Penelitian ini mempelajari serta membuktikan bahwa sifat-sifat yang terjadi pada ruang bernorma umum berlaku juga pada ruang bernorma kuasi antara lain kekonvergenan, Cauchy, serta terbatas. Teorema yang mendukung dari pembuktian sifat kelengkapan tersebut berhasil dikonstruksi yaitu kombinasi linear pada vektor bebas linear berdimensi hingga dengan norma kuasi mengakibatkan jaminan bahwa nilai norma kuasinya memiliki batas bawah. Lebih lanjut menggunakan teorema tersebut, tujuan penelitian pada paper ini membuktikan bahwa ruang berdimensi hingga dari ruang bernorma kuasi merupakan ruang yang bersifat lengkap. Hal ini menegaskan bahwa solusi dan nilai limit dari barisan yang berada pada ruang tersebut dijamin keberadaannya dan membuat penelitian seperti teori operator dan analisis fungsional yang menggunakan titik tetap sebagai solusi bisa diteliti sebagai dasar untuk penelitian berikutnya.

REFERENSI

- Al-Delfi, J. K. K. 2024. A dislocated quasi-normed space and its completeness for a fixed point theorem. *Baghdad Science Journal*, 21(6). <https://doi.org/10.21123/bsj.2023.8247>
- Aoki, T., 1942, Locally Bounded Linear Topological Spaces, *Proceedings of Imperial Academy Tokyo*, 18, 588-594.
- Baak, C. 2005. Generalized Quasi-Banach Spaces. *Journal of the Chungcheong Mathematical Society*, 18(2), 215-222.
- Bae, J.-H., & Park, W.-G. 2010. Stability of a Cauchy-Jensen functional equation in quasi-Banach spaces. *Journal of Inequalities and Applications*, 2010, Article 151547.

<https://doi.org/10.1155/2010/151547>

- Berinde, V. 2024. Existence and approximation of fixed points of enriched contractions in quasi-Banach spaces. *Carpathian Journal of Mathematics*, 40(2), 263-274.
- Chmieliński, J. 2014. Normed spaces equivalent to inner product spaces and stability of functional equations. *Aequationes Mathematicae*, 87, 147-157. <https://doi.org/10.1007/s00010-013-0193-y>
- Cobzaş, S. 2010. Functional analysis in asymmetric normed spaces. arXiv preprint arXiv:1006.1175.
- Dung, N. V., & Hang, V. T. L. 2018. The generalized hyperstability of general linear equations in quasi-Banach spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 462(1), 131-147. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.01.070>
- Ebadian, A. 2012. On the stability of a parametric additive functional equation in quasi-Banach spaces. *Abstract and Applied Analysis*, 2012, Article 235359. <https://doi.org/10.1155/2012/235359>
- Fiorenza, A., Karadzhov, G., & Soria, J. 2021. Grand quasi Lebesgue spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 504(1), 125369
- Firdaus, H., & Supama. 2020. Bounded linear operators on quasi normed spaces. *Jurnal Matematika Thales*. <https://doi.org/10.22146/jmt.55322>
- Firdaus, H. 2024. Kelengkapan pada ruang bernorma kuasi. *Trigonometri: Jurnal Matematika*, 1(2), 1-10
- Huu Tron, N., & Théra, M. (2024). Fixed points of regular set-valued mappings in quasi-metric spaces. *Optimization*, 1-27. <https://doi.org/10.1080/02331934.2024.2399231>
- Hyers, D.H. 1939. Locally Bounded Linear Topological Spaces, *Revista de Ciencias*, 41, 555-574.
- Kang, D. 2010. On the stability of generalized quartic mappings in quasi-normed spaces. *Journal of Inequalities and Applications*, 2010, Article 198098. <https://doi.org/10.1155/2010/198098>
- Kreyszig, E. 1979. *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley and Sons. Inc., Canada.
- Kwun, Y. C., Mehmood, Q., Nazeer, W., Ul Haq, A., & Kang, S. M. 2016. Relations between generalized von Neumann-Jordan and James constants for quasi-Banach spaces. *Journal of Inequalities and Applications*, 2016, Article 171. <https://doi.org/10.1186/s13660-016-1115-z>
- Li, R., & Wu, J. 2022. Hahn-Banach type theorems and the separation of convex sets for fuzzy quasi-normed spaces. *AIMS Mathematics*, 7(3), 3290-3302. <https://doi.org/10.3934/math.2022183>
- Nazeer, W., Mehmood, Q., Kang, S. M., & Ul Haq, A. 2018. Generalized von Neumann-Jordan and James constants for quasi-Banach spaces. *Journal of Computational Analysis and Applications*, 25(6), 1043-1052.
- Rano, G., and Bag, T. 2014. Finite Dimensional Quasi-Normed linear spaces. *The Journal of Fuzzy*
- Helmi Firdaus/Kelengkapan Vektor Berdimensi Hingga Di Dalam Ruang Bernorma Kuasi

Mathematics, 22(2), 669-676.

Rano, G., and Bag, T. 2015. Bounded Linear Operators in Quasi-Normed Linear Spaces. *Journal of The Egyptian Mathematical Society*, 23, 303-308.

Robdera, M. A. 2016. On the subspace problem for quasi-normed spaces. *Asian Research Journal of Mathematics*, 1(1), 1–7. <https://doi.org/10.9734/ARJOM/2016/26927>

Romaguera, S., & Sanchis, M. (2000). Semi-Lipschitz functions and best approximation in quasi-metric spaces. *Journal of Approximation Theory*, 103(2), 292–301. <https://doi.org/10.1006/jath.1999.3439>

Taha, D., Zhao, W., Riestenberg, J. M., & Strube, M. 2023. Normed spaces for graph embedding. arXiv preprint arXiv:2312.01502

Yan, C. 2021. On the completion of fuzzy normed linear spaces in the sense of Bag and Samanta. *Fuzzy Information and Engineering*, 13(2), 236–247. <https://doi.org/10.1080/16168658.2021.1943876>